

# 表面光波回折法によるデジタル合成ホログラムの進展 — 全方向視差ホログラムのリアルタイムレンダリングを目指して —

松島恭治

関西大学工学部 先端情報電気工学科

あらし 点光源を用いた物体光波の合成は、点光源数とホログラムのサンプリング数の積に比例した計算時間を必要とする。それに対して、物体を構成する平面からの回折光波を求める表面光波回折法は本質的に高速であると期待される。この表面光波回折法でサンプリング間隔の拡大とサンプリング範囲の減少によりサンプリング点を削減したところ、 $8192 \times 4096$  点のホログラムの計算時間が 1 分 58 秒、準 XGA サイズの  $1024 \times 1024$  点では 2.1 秒となった。  
キーワード 表面モデル、計算機合成ホログラム、物体光波、光波回折、波面展開法

## Progress in Digitally Synthetic Holograms by the Surface Diffraction Model

— Toward the Real-Time Rendering of Full-Parallax Holograms —

Kyoji Matsushima

Department of Electrical Engineering and Computer Science, Kansai University

**Abstract** The computation time of digitally synthetic holograms by the point-source method is proportional to the product of the number of point-sources in the object and sampling points in the hologram. Therefore, the surface diffraction method that calculates object fields emitted from surfaces composing the object is expected to be faster than the point source method. The computation time by the surface diffraction method can be reduced by decreasing the number of sampling points. For example, the computation time is 1 min 58 s for the hologram with  $8192 \times 4096$  points and 2.1 s for quasi-XGA size,  $1024 \times 1024$  points.

**keywords** Surface model, Computer-generated hologram, Object field, Diffraction of light, Angular spectrum of plane waves

### 1 初めに

デジタル合成ホログラムは、数値モデルとして表現された物体からの光波を数値合成し、それを適当な方法で表示することにより、架空の物体からのホログラムを合成する技術である。そのため、被写体が必要な古典的ホログラムに対して、いわばホログラムの“コンピュータグラフィックス”と位置づけられる。デジタル合成ホログラムは、光波そのものを合成するため人間のすべての立体感を満たす理想の立体画像を作り出す技術である。しかしながら、その実用化に向けては二つの技術的ハードルをクリアしなければならない。一つは、デジタル合成ホログラムを印刷/表示するための極めて高解像度の表示デバイスの開発であり、いま一つは、物体光波の数値合成時間の短縮である。

現在最もよく用いられる物体光波合成方法は、物体表面に点光源を充填する方法である [1]。この方法は原理的に簡単である反面、全方向視差の場合には点光源数とホログラムのサンプリング点数の積に比例する計算時間が必要であ

り [2]、その計算時間は長大なものとなる。そのため、種々の近似計算法や加速計算アルゴリズムが提案されているが、本質的な解決にはいたっていない。一方、筆者らが提案している表面回折法 [3,4] では、物体を構成する平面単位で面光源からの光波を計算し、またその計算に FFT を用いることができることから、この限界を乗り越えることが期待される [5]。

本稿では、サンプリング点の削減により表面回折法での計算時間を短縮した結果について報告する。

### 2 表面モデル光波回折法

#### 2.1 物体モデル

表面光波回折法における物体モデルと座標系の定義を図 1 に示す。本手法では物体表面を平面で分割した表面モデルを用いる。各表面はそれぞれローカルな座標系を有し、 $n$  番目の平面の座標系を  $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$  で表記する。この時、物体表面はかならず  $(x_n, y_n, 0)$  平面に含まれるように座標

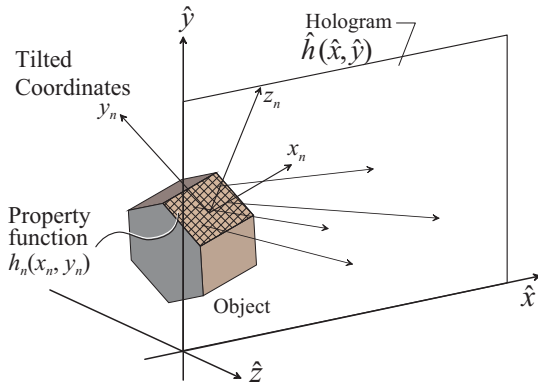


図 1 座標系と物体モデル

系を定義するものとする．これを傾いたローカル座標系と呼ぶ．また，この傾いた座標系と原点が一致し，ホログラムに対して平行な座標系  $\hat{\mathbf{r}}_n = (\hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{z}_n)$  を，平行なローカル座標系と呼ぶ．

傾いた座標系の平面  $(x_n, y_n, 0)$  上で表面特性関数  $h_n(x_n, y_n)$  を次の形式で定義する．

$$h_n(x_n, y_n) = a_n(x_n, y_n)\Psi(x_n, y_n)p_n(x_n, y_n), \quad (1)$$

ここで， $a_n(x_n, y_n)$  は物体表面の形状とテクスチャを表わす実関数であり，一方，

$$\Psi(x_n, y_n) = \exp[ik\phi_d(x_n, y_n)]$$

は拡散性を有する位相である．なお， $\phi_d(x_n, y_n)$  として完全な乱数を用いるとスペックルノイズや伝搬計算時の折り返し誤差を発生するため，本研究では，フーリエ CGH で提案されている拡散性位相 [6] を用いている．最後の  $p_n(x_n, y_n)$  は，ホログラムに垂直に進む平面波の位相を傾いたローカル座標系で表現した項であり，表面から放出された光をホログラムの方向に進ませる役割がある．ただし，実際にはこの項は次節の回転変換の過程でフーリエ空間上の平行移動として表わされる．

## 2.2 回転変換 [7]

各平面  $(x_n, y_n, 0)$  上で定義された表面特性関数  $h(x, y)$  を物体表面上の光波複素振幅として，その回折光波を平行ローカル座標系上で求める．これを回転変換と呼ぶ．なお，以下では添字  $n$  を省略している．いま， $h(x, y)$  のフーリエ変換を

$$H(u, v) = \mathcal{F}\{h(x, y)\} \quad (2)$$

とする． $u, v, w$  は傾いた座標系の  $x, y, z$  軸に対するフーリエ周波数であり， $w(u, v) = (\lambda^{-2} - u^2 - v^2)^{1/2}$  の関係がある．ここで  $\lambda$  は波長である．同様に平行座標系におけるフーリエ空間  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}(\hat{u}, \hat{v}))$  を定義する．

傾いた座標系と平行座標系が回転行列  $\mathbf{T}$  により， $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{T}\mathbf{r}$  また  $\mathbf{r} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{r}}$  として相互に変換できるとき，これらのフー

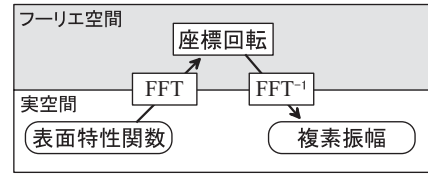


図 2 回転変換のダイアグラム

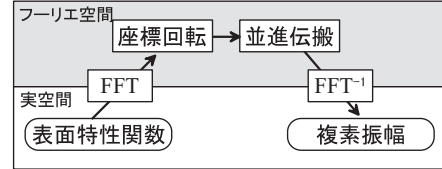


図 3 回転並進伝搬のダイアグラム

リエ周波数には

$$\begin{aligned} u &= \alpha(\hat{u}, \hat{v}) = a_1\hat{u} + a_2\hat{v} + a_3\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}), \\ v &= \beta(\hat{u}, \hat{v}) = a_4\hat{u} + a_5\hat{v} + a_6\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}), \end{aligned} \quad (3)$$

の関係がある．ここで，回転行列を

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

と定義している．

式 (3) によるフーリエ空間中での座標回転は，離散的計算の際の標本点の間隔を不均一にするだけでなく，フーリエスペクトルをシフトさせる．そのため，平行座標系上でのフーリエスペクトルを原点移動し，平行な座標系でのスペクトルを

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{u}, \hat{v}) &= \mathcal{R}_\psi \{H(u, v)\} \\ &\cong H(\alpha(\hat{u}, \hat{v}) - \alpha(0, 0), \beta(\hat{u}, \hat{v}) - \beta(0, 0)) \end{aligned} \quad (5)$$

として求める [8]．ここで， $\psi = (\phi, \theta)$  は回転角である．なお，実際の離散的計算ではこの処理で補間が必要になる．フーリエ変換のシフト則によりこの原点移動は式 (1) の平面波位相項  $p(x, y)$  と同じ効果をもたらすため，この原点移動により平面波位相項は不要となる．すなわち， $p(x, y) \equiv 1$  として良いことが示されている [8]．

近軸近似 [7] の下では，平行座標系での光波複素振幅は，こうして求められたフーリエスペクトルの逆フーリエ変換により次式のとおり求められる．

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{y}) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{H}(\hat{u}, \hat{v})\} \quad (6)$$

以上まとめると，実際の光波合成では， $n$  番目の平面について傾いたローカル座標系を定義し  $a(x, y)$  を決定する．この振幅分布に拡散性位相を乗算した後，(i) フーリエ変換を行い，(ii) 式 (5) の座標回転，(iii) 逆フーリエ変換により，平行なローカル座標系上での複素振幅が求まる．この過程は図 2 のダイアグラムで表わすことができる．

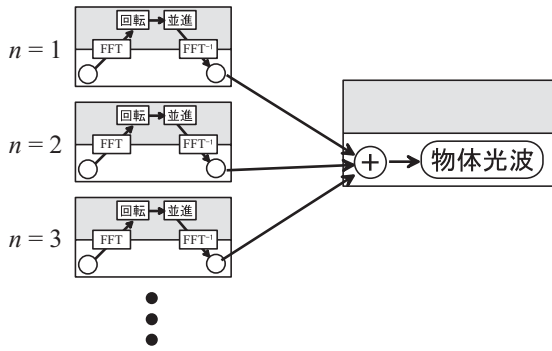


図 4 実空間における光波の合成

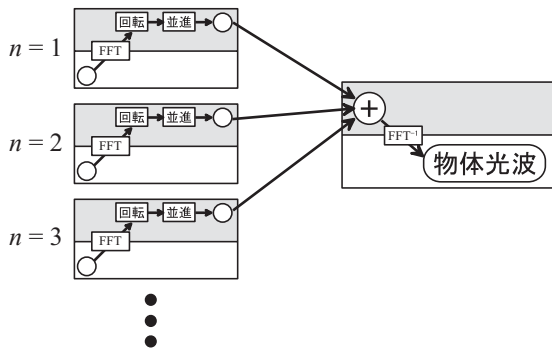


図 5 フーリエ空間における光波の合成

### 2.3 並進伝搬

回転だけではなく、並進的な伝搬計算を行ってはいじめてホログラム上での複素振幅が求まる。回転後にホログラムと平行な平面で表わされた複素振幅を改めて伝搬しても良いが、並進伝搬計算はフーリエ空間で効率よく行えるため、距離  $d$  の並進伝搬演算子を  $\mathcal{P}_d\{\cdot\}$  とすると、この一連の手順は

$$\hat{h}_n(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{P}_{d_n} \mathcal{R}_{\psi_n} \mathcal{F}\{h_n(x_n, y_n)\},$$

となり、図 3 のダイアグラムで表わすことができる。 $\mathcal{P}_d\{\cdot\}$  としては、波面展開法やフレネル回折を用いることができる。波面展開法では並進伝搬は

$$\mathcal{P}_{d_n}\{\hat{H}_n(\hat{u}_n, \hat{v}_n)\} = \hat{H}_n(\hat{u}_n, \hat{v}_n) \exp[i2\pi\hat{w}(\hat{u}_n, \hat{v}_n)d_n], \quad (7)$$

と表わされる。

### 2.4 各平面からの光波の合成

個々に計算した平面の光波を重畳することにより、最終的に物体光波を得る。この重畳には、(a) 実空間での合成、(b) フーリエ空間での合成、の 2 種類が考えられる。これらのダイアグラムを図 4 と 5 に示す。表式としては、(a) は

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_n \mathcal{F}^{-1} \mathcal{P}_{d_n} \mathcal{R}_{\psi_n} \mathcal{F}\{h_n(x_n, y_n)\} \quad (8)$$

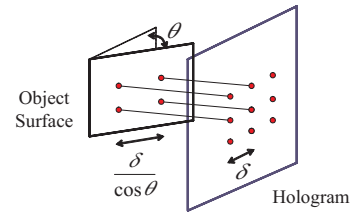


図 6 傾いた平面上でのサンプリング間隔

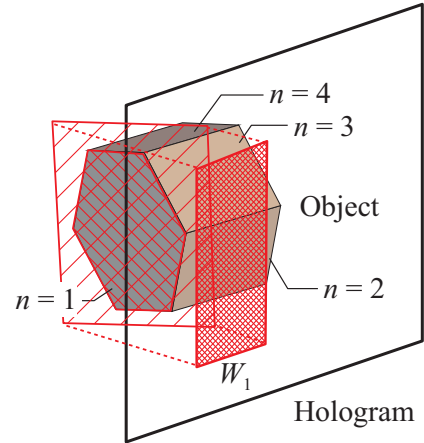


図 7 ホログラム上でのサンプリング領域

また、(b) は

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{y}) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_n \mathcal{P}_{d_n} \mathcal{R}_{\psi_n} \mathcal{F}\{h_n(x_n, y_n)\} \right\} \quad (9)$$

となる。このダイアグラムからわかるとおり、(a) の場合では 1 枚の平面の処理に必ず 2 回の FFT が必要であるのに対して、(b) では  $N$  枚の平面に対して  $N+1$  回の FFT が必要である。したがって、一見 (b) の方式の方が計算時間が短いように見える。しかし、これは次節で述べるようにそう単純ではない。

## 3 高速化の手法

### 3.1 サンプリング間隔の拡大

まず第一に考えられる計算時間の短縮法として、特性関数のサンプリング間隔を広げる方法が考えられる。回転後のフーリエ空間上でのサンプリング範囲は、回転変換前のそれに比べて必ず減少するため、あらかじめ特性関数のサンプリング間隔を広げてフーリエ空間上でのサンプリング範囲を狭めておいても同じ結果が得られる。従って、図 6 に示す様に、回転後の平面上のサンプリング位置を回転変換前の平面  $(x_n, y_n, 0)$  に射影して得られる間隔が特性関数のサンプリング間隔の最大値になる。すなわち、ホログラム上でのサンプリング間隔が  $\delta$  の場合、角度  $\theta$  の平面の特性関数のサンプリング間隔は、最大  $\delta/\cos\theta$  まで広げることができる [9]。

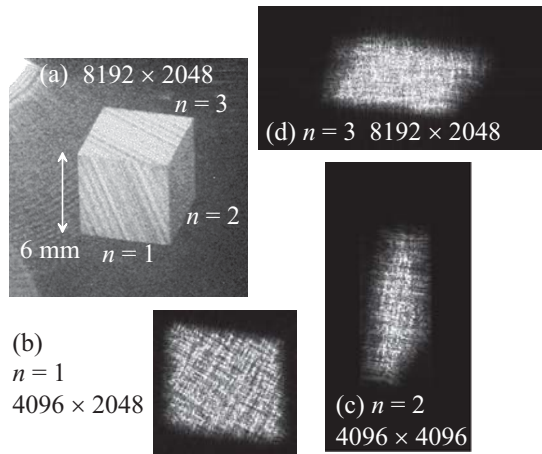


図 8 立方体のホログラム

### 3.2 サンプルング範囲の減少

特性関数のサンプルング範囲(定義域)は、図 7 に示したとおり、計算したい表面(図 7 では  $n = 1$  面)が放出した光波が回折してホログラムに到達した際のホログラム上の範囲  $W_1$  を求め、それを傾いたローカル座標系の  $(x_1, y_1, 0)$  面に射影した範囲とすれば良い。サンプルング間隔は前節の方法で決まるため、これを組み合わせるとかなりサンプルング点数を減少することができる。

ただし、この手法をそのまま用いることができるのは、2.4 節の (a) 実空間での合成の場合、のみである。なぜなら、フーリエ空間中でのサンプルング間隔は実空間でのサンプルング範囲によって決まるため、この手法で平面ごとに特性関数のサンプルング範囲を変えた場合、 $\hat{H}(\hat{x}_n, \hat{y}_n) = \mathcal{F}\{h_n(x_n, y_n)\}$  のサンプルング間隔が  $n$  ごとに異なってしまい、(b) の場合ではそのまま総和をとることができなくなる。この場合でも補間を行うことにより、総和を取ることは可能であるため、補間計算が十分に高速であれば、(b) のフーリエ空間での合成の方が計算時間が減少する可能性があるが、補間計算が十分に速くない場合は (a) の方が高速であることも多い。結局、両者の優劣は物体を構成する面の数と補間および FFT の計算速度によって決まると考えられる。

## 4 実験結果と計算時間

表面回折法で作成し以前報告した立方体のホログラムの光学再生像を図 8(a) に示す。この立方体の一辺の長さは 6mm であり、ホログラム自体は  $8192 \times 4096$  ピクセルでサンプルング間隔  $2 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$  のものである。図 8(b)–(d) は、(a) の立方体を各平面  $n = 1 \dots 3$  に分解し、上述の手法でサンプルング点数を調節して計算した振幅像である。これらの振幅像は平行なローカル座標系でサンプルング間隔  $2 \mu\text{m} \times 4 \mu\text{m}$  で得られたものを物理的なサイズに比例して描いてある。

Pentium 4(2.8GHz) を用いて、実空間での合成により全体

を計算するに要した時間は 1 分 58 秒であった。また、XGA サイズのディスプレイを想定し、ホログラムサイズを  $1024 \times 1024$  に縮小し、物体サイズを同じ比率で縮小して同様のホログラムを計算した場合の計算時間は 2.1 秒であった。なお、この時 FFT として Split-Radix 型 FFT [10] を用いた。

## 5 まとめ

表面光波回折法は一点毎の点光源からの光波を計算する代わりに物体表面を構成する面光源からの光波を計算して物体光波を合成する手法である。実空間で各面光源からの光波を合成する場合、1 枚の面光源からの光波計算には 2 回の FFT が必要であるが、フーリエ空間で合成する場合には 1FFT/面となる。しかしながら、フーリエ空間での合成ではフーリエ空間中でのサンプルング間隔が面毎に異なり総和を取る際に補間が必要であるという問題がある。

実空間での合成を用いて、3 面からなる立方体からの  $8192 \times 4096$  点の複素振幅を計算したところ、その計算時間は 1 分 58 秒であった。また、同様に  $1024 \times 1024$  点での計算時間は 2.1 秒であり、今後の CPU の高速化や並列計算、分散計算によっては全方向視差ホログラムの実時間での光波合成が現実味を帯びてきたと考えられる。

## 参考文献

- [1] J. P. Waters: "Holographic image synthesis utilizing theoretical methods", Appl. Phys. Lett., **9**, pp. 405–407 (1966).
- [2] K. Matsushima and M. Takai: "Recurrence formulas for fast creation of synthetic three-dimensional holograms", Appl. Opt., **39**, pp. 6587–6594 (2000).
- [3] 松島, H. Schimmel, F. Wyrowski: "波面展開法を用いた表面モデル CGH の高速計算法", 3 次元画像コンファレンス 2001, pp. 13–16 (2001).
- [4] K. Matsushima and A. Kondoh: "Wave optical algorithm for creating digitally synthetic holograms of three-dimensional surface objects", SPIE Proc. Practical Holography XVII and Holographic Materials IX, #5005, pp. 190–197 (2003).
- [5] K. Matsushima: "Fast creation of digitally synthetic holograms of surface objects by use of a wave-optical method", Technical Digest of ICO 2004, pp. 467–468 (2004).
- [6] R. Bräuer, F. Wyrowski and O. Bryngdahl: "Diffusers in digital holography", J. Opt. Soc. Am., **A8**, p. 572 (1991).
- [7] K. Matsushima, H. Schimmel and F. Wyrowski: "Fast calculation method for optical diffraction on tilted planes by use of the angular spectrum of plane waves", J. Opt. Soc. Am., **A20**, pp. 1755–1762 (2003).
- [8] K. Matsushima: "Computer-generated holograms for three-dimensional surface objects with shade and texture". (to be published).
- [9] D. Leseberg: "Computer-generated three-dimensional image holograms", Appl. Opt., **31**, pp. 223–229 (1992).
- [10] 大浦: "FFT の概略と設計法", <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~oura/fftman/index.html>.