

## 波面展開法を用いた光波伝搬計算アルゴリズム —自由空間における光波伝搬のシミュレーションとその応用—

松島恭治

関西大学工学部電気工学科, 関西大学 HRC

A novel method for calculating complex-amplitude distribution of the light wave diffracted by a tilted aperture as well as the light wave diffracting onto tilted screen is presented. Since this method is based on rotational transformation of angular spectrum of plane waves and is analytically rigorous, the method does not involve any restriction on the propagation distance. Furthermore, the computation time of this method is comparable with conventional algorithms of diffraction between parallel planes, because only twice FFT and an interpolation in Fourier spectrum are necessary for its numerical calculation. The basic theory of the method and its application to digitally synthetic holograms is reported.

### 1. はじめに

近年の微細加工技術の発展に伴い, 光の回折効果を利用したビーム成形素子や分岐素子が作製可能となってきた. これらの回折光学素子の設計・最適化では回折光波を正確に数値計算することが必要である.

また位相シフト干渉露光法を用いたデジタルホログラフィの技術により, 単に結像した被写体の光強度分布のみならず, その被写体からの位相を含んだ光波複素振幅そのものを電子的に記録することが可能となって来た. この場合, 記録された光波複素振幅を数値的に逆回折伝播することにより, 被写体の像が得られる.

また逆に, 架空の物体からの光波を数値合成し, ホログラム干渉縞をデジタル的に描画することによって作製されるデジタル合成ホログラム (Computer-Generated Hologram, CGH と呼ばれる) では, 点光源を仮想物体の表面に配置する従来の手法から脱却し, 小さなパッチで構成された表面モデル 3次元物体の表面そのものからの光波を数値合成する方法が, 主に計算時間の問題から求められている. 自由空間の光波伝搬・回折の理論は古くから多数知られているが, この様な応用に対しては, これらの従来の計算方法・理論は無力である.

等方性で均一な媒質中における光の回折波の伝播

は, フレネル・キルヒホッフ積分やフレネル近似, フランフォーファ近似, フレネル・ゾンマーフェルト法, 波面展開法などで数値計算することが可能である. 特に波面展開法は, フレネル近似やフランフォーファ近似における伝播距離の制約が無く, 2 回のフーリエ変換と若干の付加演算で実現できるため, 数値計算向きの方法と言える. しかしながら波面展開法も含めて, 従来から知られた回折光波計算法に共通の制約事項は, 開口面と回折光観測面が平行でなければならないことである. 傾いた開口面からの回折計算は, フレネル領域[1]やフランフォーファ領域[2]ではすでに報告されている. しかしながら, 通常フレネル回折計算・フラウンフォーファー回折計算と同様に, これらは伝播距離に関する制約を抱えている.

そこで, 本件研究では伝播距離の制約が無い波面展開法において, 開口面あるいは観測面を任意に傾けて回折光波を高速に計算する方法を考案した [3-6].

### 2. 配置と座標系

Fig. 1 に示したように, 平面  $S$  上に複素開口関数  $g(x, y)$  を定義し,  $S$  と平行でない観測平面  $R$  で回折光波の複素振幅  $f(\hat{x}, \hat{y})$  を求める. 図中(a)は観測面  $R$  が傾いた場合, また(b)は開口面  $S$  が傾いた場合に相

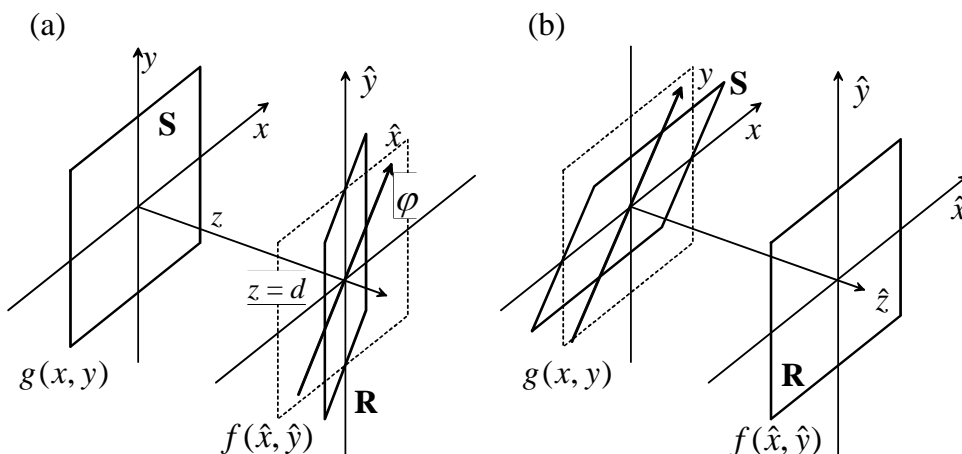


Fig. 1 開口面と観測面の座標系の定義

当するが, 両者の違いは平面の回転変換と並進伝播計算の順序にすぎない. 従ってこの様な回折シミュレーションでは光波複素振幅の回転変換が重要となる.

### 3. フーリエスペクトル領域における座標系の回転

今, Fig.1 において  $d = 0$  とし, 回転変換のみを考える.  $g(x, y)$  のフーリエスペクトルを

$$G(u, v) = F \{g(x, y)\} = \iint g(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (1)$$

とし, 逆変換を

$$g(x, y) = F^{-1} \{G(u, v)\} = \iint G(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)] du dv \quad (2)$$

とする時, (2)式は平面波  $G(u, v) \exp[i2\pi(ux + vy)]$  を平面 S 上で積分していると解釈できるため, 平面波の

波動ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} [k_x \quad k_y \quad k_z]$  と空間周波数の間

には,  $\mathbf{k} = 2\pi[u \quad v \quad w(u, v)]$  の関係があることがわかる. ここで,  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ ,  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$  であり, また

$w(u, v) = \sqrt{\lambda^2 - u^2 - v^2}$  である. 同様に  $f(\hat{x}, \hat{y})$  のスペ

クトルは,

$$F(\hat{u}, \hat{v}) = F \{f(\hat{x}, \hat{y})\} = \iint g(\hat{x}, \hat{y}) \exp[-i2\pi(\hat{u}\hat{x} + \hat{v}\hat{y})] d\hat{x} d\hat{y} \quad (3)$$

であり,  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  座標系での波動ベクトルは

$\hat{\mathbf{k}} = 2\pi[\hat{u} \quad \hat{v} \quad \hat{w}(\hat{u}, \hat{v})]$ ,  $\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}) = \sqrt{\lambda^2 - \hat{u}^2 - \hat{v}^2}$  である.

従って,  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  座標系から  $(x, y, z)$  座標系への回転変換行列を

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \quad (4)$$

で与えるとき, 平面 S における空間周波数  $(u, v)$  は, 平面 R での周波数  $(\hat{u}, \hat{v})$  と,

$$\begin{aligned} u &= a_1\hat{u} + a_2\hat{v} + a_3\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}) \\ v &= a_4\hat{u} + a_5\hat{v} + a_6\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}) \end{aligned} \quad (5)$$

の関係にある. そのため, 平面 R でのスペクトルは

$$F(\hat{u}, \hat{v}) = G(a_1\hat{u} + a_2\hat{v} + a_3\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}), a_4\hat{u} + a_5\hat{v} + a_6\hat{w}(\hat{u}, \hat{v})) \quad (6)$$

で与えられる. このスペクトルを再積分することにより, 平面 R 上における複素振幅が次のように求まる.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}, \hat{y}) &= \iint_{\infty} F(\hat{u}, \hat{v}) \mathbf{J}(\hat{u}, \hat{v}) \exp[i2\pi(\hat{u}\hat{x} + \hat{v}\hat{y})] d\hat{u} d\hat{v} \\ &= F^{-1} \{F(\hat{u}, \hat{v}) \mathbf{J}(\hat{u}, \hat{v})\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, 再積分時の積分要素の変換が非線形であるため, 回転変換の前後で光波のエネルギーを保存するためにヤコビアン

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\hat{u}, \hat{v}) &= a_1a_5 - a_2a_4 + (a_2a_6 - a_3a_5)\hat{u}/\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}) \\ &\quad + (a_3a_4 - a_1a_6)\hat{v}/\hat{w}(\hat{u}, \hat{v}) \end{aligned} \quad (8)$$

が必要である.

以上の表式(6)~(8)の導出では, 全く近似を用いていない. しかしながら, 数値計算で離散フーリエ変換を用いる際には, (6)式のスペクトルの回転変換において, サンプリング点の分布が不均一になるため, スペクトルの補間が必要となり, このスペクトル補間の方法が計

算精度決定することになる。

#### 4. 一軸回転の精度と計算時間

傾いた観測面での回折光波の一例として, Fig.1(a)の配置で,  $y$  軸を中心に回転した観測面での回折光波を求めた. この場合, 回転変換行列は,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

であるので, 平面  $\mathbf{R}$  でのスペクトルとヤコビアンは,  $z = d$  でのスペクトル  $G_d(u, v)$  に対して

$$\begin{aligned} F(\hat{u}, \hat{v}) &= G_d(\hat{u} \cos \varphi - \hat{v} \sin \varphi, \hat{v}) \\ \mathbf{J}(\hat{u}, \hat{v}) &= \cos \varphi + \hat{u} \sin \varphi / \hat{w}(\hat{u}, \hat{v}) \end{aligned} \quad (10)$$

となる. これを(7)式に代入して逆フーリエ変換することにより, 傾いた観測面上での複素振幅を求めることができる.

Fig.2 は, この方法で計算した, 傾いた観測面上の光波複素振幅である. Sample A は波長 633[nm]のガウスビームの断面を傾いた観測面上で見たものであり, 左列が振幅, 右列がグレイスケールで表わした位相である. サンプル数  $256 \times 256$ , サンプル間隔  $20 \mu\text{m}$  である. 一方 Sample B は矩形開口から  $30[\text{mm}]$ の位置での回折光波であり, 波長, サンプル数, サンプリ

ング間隔は  $A$  と同じである. Sample C は  $A$  と同様のガウスビームであるが, 焦点距離  $15[\text{mm}]$ のレンズを通過した場合と同様の位相を与えており, レンズから距離  $10[\text{mm}]$ 伝搬した位置での複素振幅である. これらの計算では, スペクトルの補間には Cubic 補間法を用いた.

この結果の精度を評価するため, Fig.3 に示した様に, 通常の波面展開法で多数の平面上で複素振幅を計算することにより, 厳密な 1 次元分布  $f(\hat{x}, 0)$  を計算し, 本手法による計算結果との SN 比,

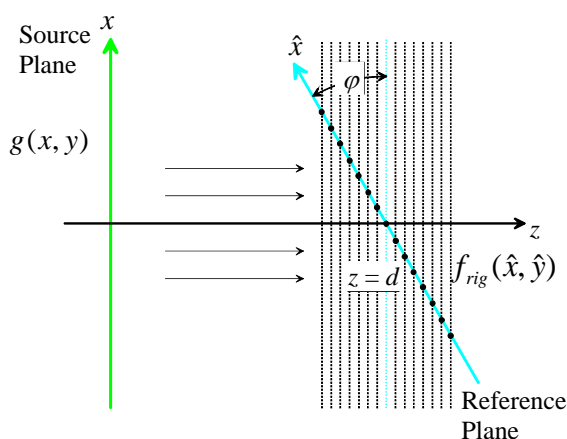


Fig. 3 精度評価のための厳密解の計算

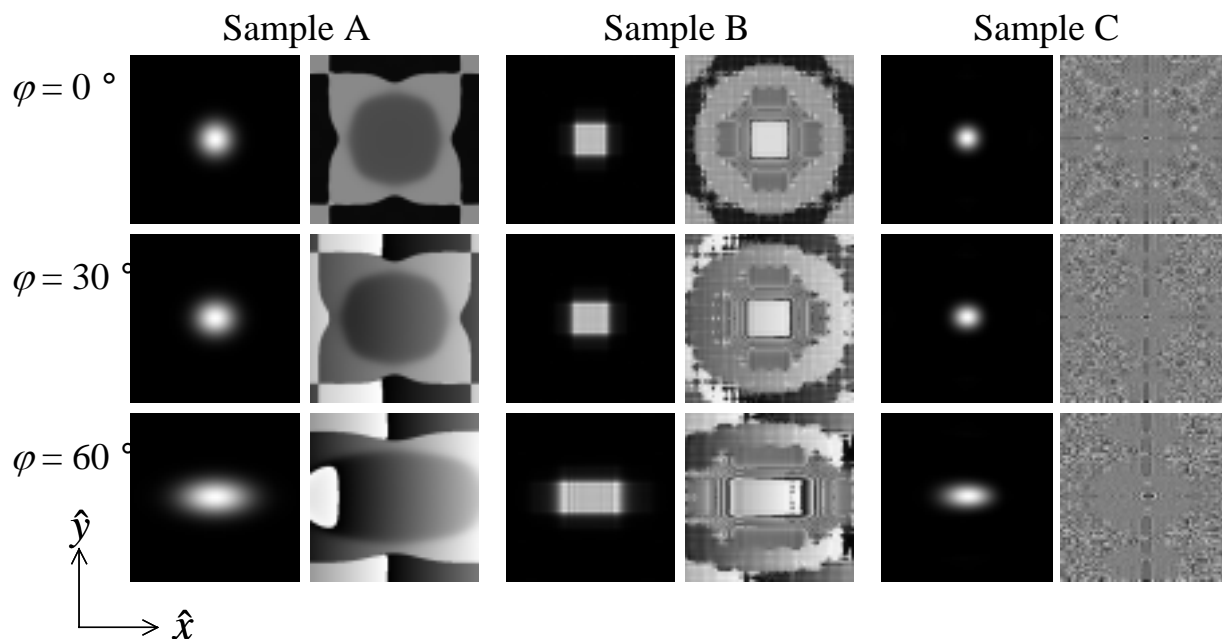


Fig. 2 傾いた観測面上で求められた複素振幅. 各例について左列は振幅, 右列は位相をグレイスケールで描いている

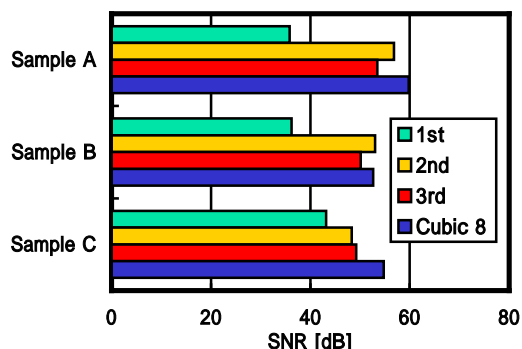


Fig. 4 S/N 比で表わした計算精度

$$SNR = \frac{\int |f(\hat{x},0)|^2 d\hat{x}}{\int |f(\hat{x},0) - f_{rig}(\hat{x},0)|^2 d\hat{x}} \quad (11)$$

を様々な補間法で求めた結果を Fig. 4 に示す. この図で“*n*-th”は *n* 次の反復線形補間法, “Cubic8”は 8 点の Cubic 補間法を表す. この結果からわかるとおり, 補間法によって多少の差異はあるが, 概ね 50dB 以上の SNR 比が得られている.

Cubic 補間法を用い, 回転角を変えて測定した SN 比を Fig. 5 に示す. 本手法で計算した複素振幅分布の SN 比はいずれの角度でも 50dB 以上であることがわかった.

2 次元の場合について, これらの一軸回転した観測面上への光波計算の計算速度を測定した結果を Fig. 6 に示す. これは Pentium III 1GHz による計算時間である. この結果からわかるとおり, 計算時間のちょうど 3

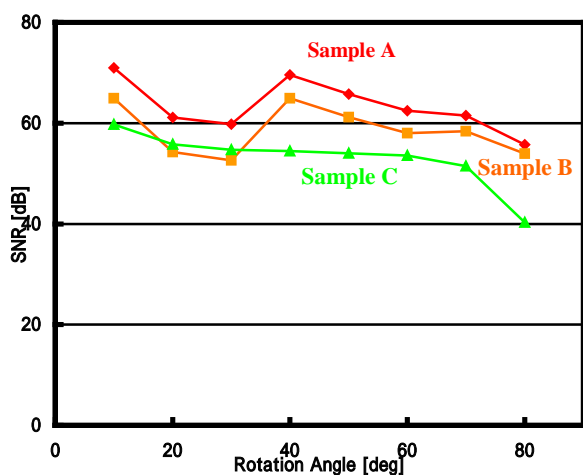


Fig. 5 計算精度の回転角度依存性

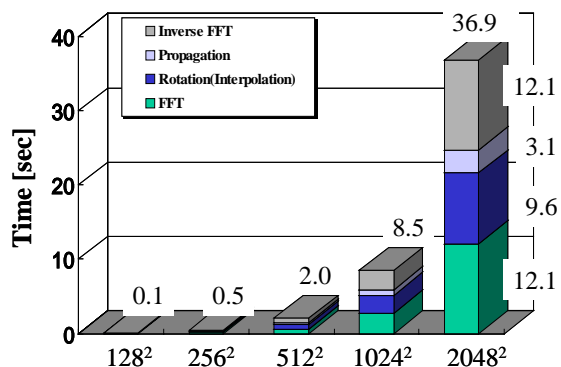


Fig. 6 Pentium III 1GHz による計算時間.

分の 2 を FFT および逆 FFT が占めており, フーリエ領域における回転変換(スペクトル補間)が占める割合は 26% に過ぎない. 回転変換以外の時間は, 通常の並進的な光波伝搬計算でも必要な時間であり, 回転変換にともなう時間の増加はそれほど大きなものでないことがわかる.

5. デジタル合成ホログラムの物体光波合成への応用  
前節では主に, 観測面の回転を扱ったが, 複素開口関数を定義している平面 S の回転は, デジタル合成ホログラムにおける表面モデル 3 次元物体からの物体光波の合成に有用である. Fig. 7 に物体光波合成への応用する場合の配置と座標系を示す. ホログラムは (X, Y) 平面上に位置するとし, ホログラムの前方向に Z 軸を取る. 一方, 小平面により構成されている物体の

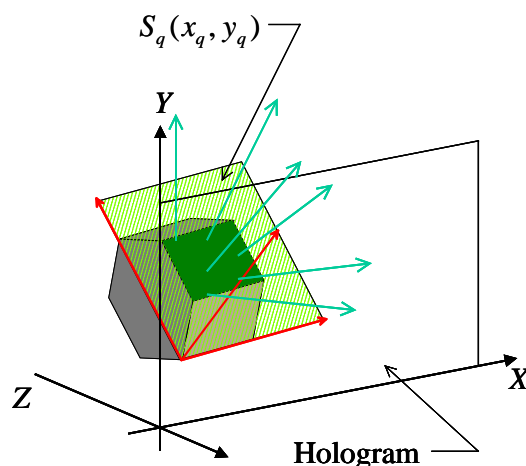


Fig. 7 複素開口関数の回転により物体光波を数値合成するための原理と座標系

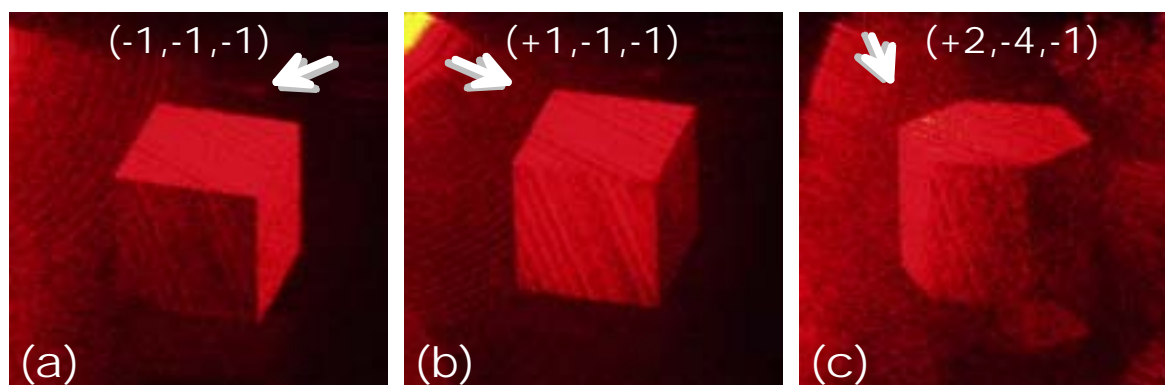


Fig 8 表面特性関数(複素開口関数)を回転する方法により数値合成したホログラムの光学再生像.  
物体はフラットシェーディングされており, 図中の矢印と数字は照明光ベクトルを表わしている.

$q$  番目の平面を  $(x_q, y_q)$  平面内に含む傾いた座標系  $(x_q, y_q, z_q)$  を定義する. さらに, この  $(x_q, y_q)$  平面内で表面特性関数  $s_q(x_q, y_q)$  を定義する. この関数は, 物体を構成する小平面の形状, 散乱性, 質感, テクスチャなどの情報を含む複素関数であり, 複素開口関数  $g(x, y)$  に相当している.

この表面特性関数からの回折光波  $h_q(X, Y)$  をホログラム上で求め, 物体を構成するすべての平面について総和,

$$H(X, Y) = \sum_q h_q(X, Y)$$

を求めることにより, 物体光波を合成する.

このような考え方に基づいて数値合成した物体光波に対して作製したホログラムの光学再生像の例を Fig. 8 に示す. ホログラムはいずれも  $8192 \times 4096$  ピクセルで, ピクセル間隔  $2\mu\text{m} \times 4\mu\text{m}$  で作製したものである. 従来から用いられている点光源モデルで同様の物体光波を合成した場合数 10 時間を要するのに対して, 本手法を用いるといずれのホログラムも 30 分以下で数値合成が可能であった[7].

## 6. まとめ

従来困難であった傾いた平面への光波回折や, 傾いた開口からの光波回折を計算する手法を提案した. この手法は波面展開法に基づいてフーリエ空間で座標回転する方法であり, 伝搬距離に関する制約が全くない. また, 回転変換に伴う計算時間の増加は, 通常の平行な平面間の回折・伝搬計算に対して約 26% であり,

それほど大きなものではない.

観測面の回転についてはシミュレーションによりその精度を, また開口面の回転については実際にホログラムを作製し, その効果を確認した.

## 参考文献

- [1] D. Leseberg and C. Frère: Appl. Opt. **27**, (1988)3020.
- [2] H. J. Rabel, N. Bolognini, and E. E. Sicre: Opt. Acta **32**, (1985)1309.
- [3] 松島恭治, H. Schimmel, F. Wyrowski: 波面展開法を用いた表面モデル CGH の高速計算法, 3次元画像カンファレンス 2001, 13-16(2001).
- [4] 松島恭治, H. Schimmel, F. Wyrowski: 波面展開法による傾いた平面への光波回折シミュレーション, Optics Japan 2001, pp.229-230 (2001).
- [5] K. Matsushima, H. Schimmel, F. Wyrowski: New Creation Algorithm for Digitally Synthesized Holograms in Surface Model by Diffraction from Tilted Planes, Practical Holography XVI and Holographic Materials VIII, SPIE Proc. #4659, San Jose, 53-60(2002).
- [6] K. Matsushima and H. Schimmel and F. Wyrowski: Fast Calculation Method for Optical Diffraction on Tilted Planes Using the Angular Spectrum of Plane Waves, (to be published).
- [7] K. Matsushima, A. Kondoh: Wave Optical Algorithm for Creating Digitally Synthetic Holograms of Three-Dimensional Surface Objects, Practical Holography XVII and Holographic Materials IX, SPIE Proc., Santa Clara, (2003) (in press).